

Topología

Compacidad

1. Estudiar, utilizando la definición, si los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$ con la topología usual son compactos:

- a) $A = \{(-1)^n + 1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$.
- b) $B = \mathbb{Q}$.

2. Demostrar que $[0, 1]$ no es compacto con la topología de subespacio de la recta de Sorgenfrey.

3. Considerar en $\mathbb{R}$ la topología τ generada por la base

$$\mathcal{B} = \{(a, b) \mid a < b\} \cup \{(a, b) \cap \mathbb{Q} \mid a < b\}.$$

Demostrar que $[0, 1]$ no es un subconjunto compacto de $(\mathbb{R}, \tau)$.

4. Describir los subconjuntos compactos del espacio topológico $(\mathbb{R}, \tau)$ donde

$$\tau = \{U \subset \mathbb{R} \mid \mathbb{R} \setminus U \text{ es numerable}\}.$$

5. Sea $X = [-1, 1]$ con la topología

$$\tau = \{X, \emptyset, [-1, b), (a, 1], (a, b) \mid a < 0 < b\}.$$

Estudiar la compactidad del espacio (X, τ) .

6. Sea $X = (0, 1)$ dotado de la topología

$$\tau = \{X, \emptyset\} \cup \{(0, 1 - 1/n) \mid n = 2, 3, \dots\}.$$

Estudiar la compacidad de los abiertos y de los cerrados de X .

7. Sea $X = [-1, 1]$ dotado de la topología

$$\tau = \{U \subset X \mid 0 \notin U \text{ o } (-1, 1) \subset U\}.$$

Caracterizar los subconjuntos compactos del espacio (X, τ) .

8. Sea X un conjunto y τ y τ' dos topologías en X tales que $\tau \subset \tau'$. Razonar la veracidad o falsedad de los siguientes enunciados:

- a) Si $A \subset X$ es compacto en (X, τ) entonces A es compacto en (X, τ') .
- b) Si $A \subset X$ es compacto en (X, τ') entonces A es compacto en (X, τ) .

9. Razonar la veracidad o falsedad de los siguientes enunciados:

- a) La unión finita de subconjuntos compactos es compacto.
- b) La unión arbitraria de compactos es compacto.
- c) La intersección de una familia arbitraria de compactos es compacto.

10. Sea K un subconjunto compacto de $\mathbb{R}$ con la topología usual y $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una aplicación continua tal que $f(x) \neq x$ para todo $x \in K$. Demostrar que existe $\varepsilon > 0$ tal que, para todo $x \in K$, $|f(x) - x| \geq \varepsilon$.
11. Sea X un espacio topológico T_2 . Demostrar que dados dos compactos disjuntos $A, B \subset X$ existen abiertos disjuntos U y V con $A \subset U$ y $B \subset V$.

12. Demostrar que los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^n$ con la topología usual no son homeomorfos:
- $\mathbb{R}^n$ y S^n .
 - $B(0, 1)$ y $\overline{B(0, 1)}$.
13. Demostrar que si X es un espacio topológico compacto y $A \subset X$ es un subconjunto infinito, entonces A tiene un punto de acumulación.
14. Demostrar que si X es compacto y metrizable, toda sucesión de puntos de X contiene una subsucesión convergente.
15. Sean $X = \{a, b\}$ con la topología indiscreta e $Y = \mathbb{N}$ con la topología usual. Considerar $Z = X \times Y$ con la topología producto y demostrar que todo subconjunto de Z tiene un punto de acumulación pero Z no es compacto.
16. Demostrar que si X es un espacio topológico metrizable. Demostrar las siguientes afirmaciones:
- Si todo subconjunto infinito tiene un punto de acumulación, entonces X es compacto.
 - Si toda sucesión tiene una subsucesión convergente, entonces X es compacto.
17. Sea X un espacio topológico metrizable. Demostrar que si $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una familia de compactos no vacíos tales que $K_n \subset K_{n+1}$, entonces

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n \neq \emptyset.$$

Indicación: Construir una sucesión (x_n) con $x_n \in K_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

18. Sea X un conjunto y τ y τ' topologías en X . Supongamos que (X, τ) es compacto y T_2 . Demostrar las siguientes afirmaciones:
- Si τ' es estrictamente más fina que τ entonces (X, τ') no es compacto.
 - Si τ' es estrictamente menos fina que τ entonces (X, τ') no es T_2 .